Маленькая математика: логика и множества

Логика высказываний изучает предложения (фразы), взятые целиком, без учета их длины, состава или структуры, и утверждающие какой-то *факт* или *событие*. Причем у такого факта/события должна *однозначно и объективно определяться истинность*.

Логика высказываний изучает предложения (фразы), взятые целиком, без учета их длины, состава или структуры, и утверждающие какой-то *факт* или *событие*. Причем у такого факта/события должна *однозначно и объективно определяться истинность*.

Примеры:

- Доска в аудитории 9 белая.

Логика высказываний изучает предложения (фразы), взятые целиком, без учета их длины, состава или структуры, и утверждающие какой-то *факт* или *событие*. Причем у такого факта/события должна *однозначно и объективно определяться истинность*.

Примеры:

- Доска в аудитории 9 белая.
- Завтра в Санкт-Петербурге будет отрицательная температура.

Логика высказываний изучает предложения (фразы), взятые целиком, без учета их длины, состава или структуры, и утверждающие какой-то *факт* или *событие*. Причем у такого факта/события должна *однозначно и объективно определяться истинность*.

Примеры:

- Доска в аудитории 9 белая.
- Завтра в Санкт-Петербурге будет отрицательная температура.
- Все ручки на планете — синие.

Логика высказываний изучает предложения (фразы), взятые целиком, без учета их длины, состава или структуры, и утверждающие какой-то *факт* или *событие*. Причем у такого факта/события должна *однозначно и объективно определяться истинность*.

Примеры:

- Доска в аудитории 9 белая.
- Завтра в Санкт-Петербурге будет отрицательная температура.
- Все ручки на планете — синие.

Не высказывания:

- Завтра в Санкт-Петербурге будет холодно.

Логика высказываний изучает предложения (фразы), взятые целиком, без учета их длины, состава или структуры, и утверждающие какой-то *факт* или *событие*. Причем у такого факта/события должна *однозначно и объективно определяться истинность*.

Примеры:

- Доска в аудитории 9 белая.
- Завтра в Санкт-Петербурге будет отрицательная температура.
- Все ручки на планете — синие.

Не высказывания:

- Завтра в Санкт-Петербурге будет холодно.
- Ручка — синяя.

Формализация и логические связки

Удобно высказывания **формализовывать**: обозначать латинскими буквами.

$$A = \text{Доска в аудитории 9 белая.}$$

Формализация и логические связки

Удобно высказывания **формализовывать**: обозначать латинскими буквами.

$$A = \text{Доска в аудитории 9 белая.} \quad = 1 \qquad 0$$

Если A истинно, то пишут $A = 1$. Если A ложно, то пишут $A = 0$. Для любого высказывания можно построить **отрицание**:

«не»
«not»

$$\neg A = \text{Доска в аудитории 9 не белая.} \quad = 0 \qquad 1$$

Формализация и логические связки

Удобно высказывания **формализовывать**: обозначать латинскими буквами.

$$A = \text{Доска в аудитории 9 белая.}$$

Если A истинно, то пишут $A = 1$. Если A ложно, то пишут $A = 0$. Для любого высказывания можно построить **отрицание**:

$$\neg A = \text{Доска в аудитории 9 не белая.}$$

При этом понятно, что отрицание истинного высказывания — ложно, а отрицание ложного высказывания — истинно:

Таблица ист-ти

A	$\neg A$
0	1
1	0

Формализация и логические связки

Удобно высказывания **формализовывать**: обозначать латинскими буквами.

$$A = \text{Доска в аудитории 9 белая.}$$

Если A истинно, то пишут $A = 1$. Если A ложно, то пишут $A = 0$. Для любого высказывания можно построить **отрицание**:

$$\neg A = \text{Доска в аудитории 9 не белая.}$$

При этом понятно, что отрицание истинного высказывания — ложно, а отрицание ложного высказывания — истинно:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Два высказывания можно соединить союзом, и снова получится (сложное) высказывание:

и	или	либо… либо…	если… то…	если и только если тогда и только тогда
$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\to$	$\leftrightarrow$
&	$\vert$			
AND	OR	XOR	IMPLIES	IFF

Два высказывания можно соединить союзом, и снова получится (сложное) высказывание:

и	или	либо… либо…	если… то…	если и только если тогда и только тогда
$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Пример. A = Завтра пойдет дождь.
B = Завтра я надену красные носки.

Два высказывания можно соединить союзом, и снова получится (сложное) высказывание:

и	или	либо… либо…	если… то…	если и только если тогда и только тогда
$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\to$	$\leftrightarrow$

Пример. $A =$ Завтра пойдет дождь.
$B =$ Завтра я надену красные носки.

- $A \wedge B =$ Завтра пойдет дождь, и (!) я надену красные носки

Два высказывания можно соединить союзом, и снова получится (сложное) высказывание:

и	или	либо... либо...	если... то...	если и только если тогда и только тогда
$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\to$	$\leftrightarrow$

Пример. $A =$ Завтра пойдет дождь.
$B =$ Завтра я надену красные носки.

- $A \wedge B =$ Завтра пойдет дождь, и (!) я надену красные носки
- $A \to B =$ Если завтра пойдет дождь, то (синтаксическое опущение!) я надену красные носки.

Два высказывания можно соединить союзом, и снова получится (сложное) высказывание:

и	или	либо... либо...	если... то...	если и только если тогда и только тогда
$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\to$	$\leftrightarrow$

Пример. $A =$ Завтра пойдет дождь.
$B =$ Завтра я надену красные носки.

- $A \wedge B =$ Завтра пойдет дождь, и (!) я надену красные носки
- $A \to B =$ Если завтра пойдет дождь, то (синтаксическое опущение!) я надену красные носки.
- $A \oplus B =$ Либо завтра пойдет дождь, либо завтра я надену красные носки.

Два высказывания можно соединить союзом, и снова получится (сложное) высказывание:

и	или	либо... либо...	если... то...	если и только если тогда и только тогда
$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Пример. $A =$ Завтра пойдет дождь.
$B =$ Завтра я надену красные носки.

- $A \wedge B =$ Завтра пойдет дождь, и (!) я надену красные носки
- $A \rightarrow B =$ Если завтра пойдет дождь, то (синтаксическое опущение!) я надену красные носки.
- $A \oplus B =$ Либо завтра пойдет дождь, либо завтра я надену красные носки.
- $A \leftrightarrow B =$ Завтра пойдет дождь, если и только если я надену красные носки.

Можно догадаться, как вычисляется истинность сложного высказывания.

Можно догадаться, как вычисляется истинность сложного высказывания.

и	или	либо... либо...	если и только если тогда и только тогда
$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\leftrightarrow$

Можно догадаться, как вычисляется истинность сложного высказывания.

и

$\wedge$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

или

$\vee$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

либо... либо...

$\oplus$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

если и только если
тогда и только тогда

$\leftrightarrow$

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

если... то

$\to$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Почему у если...то... такая таблица?

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Почему у если...то... такая таблица?

решение ответ

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пусть мы решили задачу по математике. У нас есть решение A, которое может быть верным ($A = 1$) или неверным ($A = 0$), и есть ответ B, который тоже может быть верным ($B = 1$) или неверным ($B = 0$).

Почему у если...то... такая таблица?

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пусть мы решили задачу по математике. У нас есть решение A, которое может быть верным ($A = 1$) или неверным ($A = 0$), и есть ответ B, который тоже может быть верным ($B = 1$) или неверным ($B = 0$).

Из неверного решения может получиться как неверный ответ, так и верный ответ (по совпадению). Поэтому $0 \to 0 = 1$ и $0 \to 1 = 1$. А если решение верное, то неверного ответа быть не может, так что $1 \to 0 = 0$ и $1 \to 1 = 1$.

Высказывания с переменными

Существительное в высказывании можно заменить на переменную:

$$A(x) = \text{завтра будет } x.$$

Высказывания с переменными

$k \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Существительное в высказывании можно заменить на переменную:

$$A(x) = \text{завтра будет } x.$$

При этом обычно оговаривают, какому множеству принадлежит x (то есть, какие x можно подставлять в A):

$$x \in \{\text{дождь, снег, гроза, град, солнце}\}$$

Высказывания с переменными

Существительное в высказывании можно заменить на переменную:

сегодня

$$A(x) = \cancel{\text{завтра будет}}\ x.$$

При этом обычно оговаривают, какому множеству принадлежит x (то есть, какие x можно подставлять в A):

$$x \in \{\text{дождь, снег, гроза, град, солнце}\}$$

В зависимости от x высказывание может быть как истинным, так и ложным.

A(дождь) = 0

A(солнце) = 1

Еще пример:

- $E(x) = x$ четное, $x \in \mathbb{N}$.
- $F(x) = x$ делится на 4, $x \in \mathbb{N}$.

$E(2)=1$ $E(5)=0$

$F(2)=0$ $F(12)=1$

Еще пример:

- $E(x) = x$ четное, $x \in \mathbb{N}$.
- $F(x) = x$ делится на 4, $x \in \mathbb{N}$.

Хочется построить такое мудрое высказывание:

Любое $x \in \mathbb{N}$, делящееся на 4, является четным.

Еще пример:

- $E(x) = x$ четное, $x \in \mathbb{N}$.
- $F(x) = x$ делится на 4, $x \in \mathbb{N}$.

Хочется построить такое мудрое высказывание:

Любое $x \in \mathbb{N}$, делящееся на 4, является четным.

То есть, «для любого $x \in \mathbb{N}$ верно $F(x) \to E(x)$».

если $F(x)$, то $E(x)$

Еще пример:

- $E(x) = x$ четное, $x \in \mathbb{N}$.
- $F(x) = x$ делится на 4, $x \in \mathbb{N}$.

Хочется построить такое мудрое высказывание:

Любое $x \in \mathbb{N}$, делящееся на 4, является четным.

То есть, «для любого $x \in \mathbb{N}$ верно $F(x) \to E(x)$».

Для этого есть **квантор всеобщности** $\forall$. Получается:

$$\forall x \in \mathbb{N}\, (F(x) \to E(x)).$$

Еще пример:

- $E(x) = x$ четное, $x \in \mathbb{N}$.
- $F(x) = x$ делится на 4, $x \in \mathbb{N}$.

Хочется построить такое мудрое высказывание:

Любое $x \in \mathbb{N}$, делящееся на 4, является четным.

То есть, «для любого $x \in \mathbb{N}$ верно $F(x) \to E(x)$».

Для этого есть **квантор всеобщности** $\forall$. Получается:

$$\forall x \in \mathbb{N}\,(F(x) \to E(x)).$$

Это высказывание уже не содержит *свободных переменных*. В переменную x уже нельзя ничего подставлять, она «занята» квантором $\forall$. Ясно, что это высказывание истинно.

Кванторы

$E(x) = x \,\vdots\, 2$

$F(x) = x \,\vdots\, 4$

А будет ли истинным высказывание $\forall x \in \mathbb{N}\ (E(x) \to F(x))$?

Нет, например, при $x = 2$ имеем $E(x) \to F(x) = 0$.

$1 \qquad 0 \qquad 0$

Кванторы

А будет ли истинным высказывание $\forall x \in \mathbb{N}\ (E(x) \to F(x))$?
Нет, например, при $x = 2$ имеем $E(x) \to F(x) = 0$.

Только что, буквально по пути, получили еще один „интересный“ факт:

Существует такое $x \in \mathbb{N}$, что неверно $E(x) \to F(x)$.

Кванторы

А будет ли истинным высказывание $\forall x \in \mathbb{N}\ (E(x) \to F(x))$?
Нет, например, при $x = 2$ имеем $E(x) \to F(x) = 0$.

Только что, буквально по пути, получили еще один интересный факт:

$$\text{Существует такое } x \in \mathbb{N}, \text{ что неверно } E(x) \to F(x).$$

Для таких высказываний есть **квантор существования** $\exists$:

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \neg(E(x) \to F(x)). \quad = 1$$

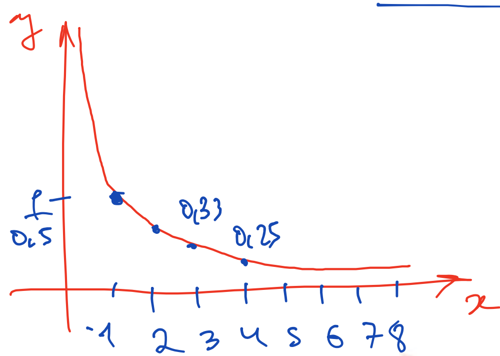
$\wedge$ $\to$ $\forall$ $\exists$

$\vee$ $\leftrightarrow$

$\oplus$ $\neg$

Кванторами можно формализовывать содержательные утверждения. Например, хотим сказать:

Величина $1/x$ при $x \in \mathbb{N}$ может быть сколь угодно малой.



0,99

0,1

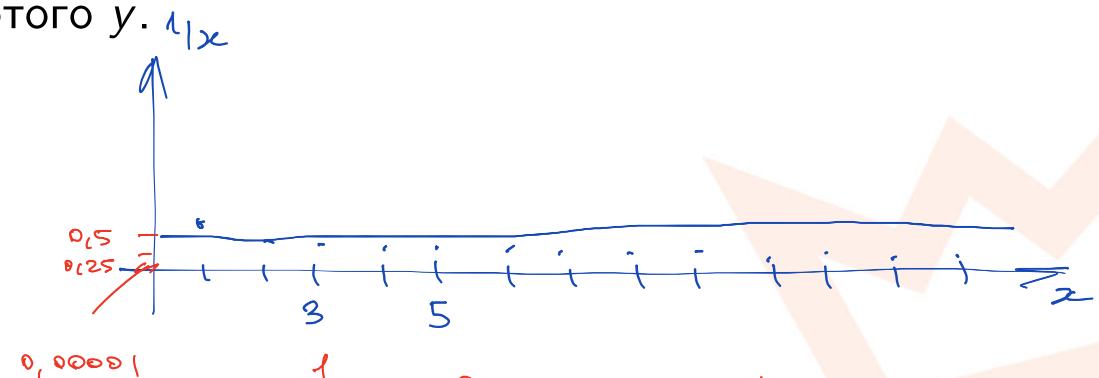
0,005

⋮

Кванторами можно формализовывать содержательные утверждения. Например, хотим сказать:

Величина $1/x$ при $x \in \mathbb{N}$ может быть сколь угодно малой.

Что значит *сколь угодно малой*? Если мы загадали некоторое положительное вещественное число y, то $1/x$ может быть меньше этого y.



$$\frac{1}{10^9} = 0{,}000000001.$$

Кванторами можно формализовывать содержательные утверждения. Например, хотим сказать:

Величина $1/x$ при $x \in \mathbb{N}$ может быть сколь угодно малой.

Что значит *сколь угодно малой*? Если мы загадали некоторое положительное вещественное число y, то $1/x$ может быть меньше этого y.

То есть, для любого $y > 0$ можно так выбрать x, что $1/x < y$.

Кванторами можно формализовывать содержательные утверждения. Например, хотим сказать:

Величина $1/x$ при $x \in \mathbb{N}$ может быть сколь угодно малой.

Что значит *сколь угодно малой*? Если мы загадали некоторое положительное вещественное число y, то $1/x$ может быть меньше этого y.

То есть, для любого $y > 0$ можно так выбрать x, что $1/x < y$. Получаем:

$$\boxed{\forall y > 0\ \exists x \in \mathbb{N}\ 1/x < y.}$$

определение сколь угодно маленькой в-ны.

Это верное утверждение.

Или, хотим сформулировать аксиому планиметрии:

Для любых двух различных точек существует единственная прямая, проходящая через обе точки.

Или, хотим сформулировать аксиому планиметрии:

Для любых двух различных точек существует единственная прямая, проходящая через обе точки.

$$\forall x, y \in P \ (x \neq y \to (\exists! a \in L : x \in a \wedge y \in a)).$$

Или, хотим сформулировать аксиому планиметрии:

Для любых двух различных точек существует единственная прямая, проходящая через обе точки.

$$\forall x, y \in P\ (x \neq y \to (\exists! a \in L\ x \in a \wedge y \in a)).$$

Здесь P, ~~естественно,~~ множество точек, а L — множество прямых. Запись $x \in a$ используется в школьной традиции: точка x лежит на прямой a.

P — точки (points)
L — прямые (lines)

Или, хотим сформулировать аксиому планиметрии:

Для любых двух различных точек существует единственная прямая, проходящая через обе точки.

$$\forall x, y \in P\ (x \neq y \to (\exists! a \in L : x \in a \wedge y \in a)).$$

Здесь P, естественно, множество точек, а L — множество прямых. Запись $x \in a$ используется в школьной традиции: точка x лежит на прямой a.

В последних двух примерах уже допускаем вольность нотации: $y > 0$ вместо «y принадлежит множеству положительных чисел», а также значок !, означающий «единственный», который можно также выразить через кванторы. *Не страшно, так все делают.*

Операции над кванторными высказываниями

Так как с помощью кванторов из высказываний получаются новые высказывания, с ними можно делать все прежние операции, и все законы сохраняются.

Операции над кванторными высказываниями

Так как с помощью кванторов из высказываний получаются новые высказывания, с ними можно делать все прежние операции, и все законы сохраняются.

Отдельно стоит рассмотреть **отрицание** кванторных высказываний.

Вернемся к нашему примеру неверного высказывания:

$$[\forall x \in \mathbb{N}\ 2|x \to 4|x] = 0.$$

(здесь $|$ означает «делит»)

русская традиция
$\vdots$ „делится на"
мировая
$|$ „делит"

Операции над кванторными высказываниями

Так как с помощью кванторов из высказываний получаются новые высказывания, с ними можно делать все прежние операции, и все законы сохраняются.

Отдельно стоит рассмотреть **отрицание** кванторных высказываний.

Вернемся к нашему примеру неверного высказывания:

$$[\forall x \in \mathbb{N}\ 2|x \to 4|x] = 0.$$

(здесь | означает «делит»)

Мы знаем, что его отрицание должно быть верным:

$$\neg\forall x \in \mathbb{N}\ 2|x \to 4|x.$$

Неверно, что для любого x натурального если $2|x$ то $4|x$,

Операции над кванторными высказываниями

Так как с помощью кванторов из высказываний получаются новые высказывания, с ними можно делать все прежние операции, и все законы сохраняются.

Отдельно стоит рассмотреть **отрицание** кванторных высказываний.

Вернемся к нашему примеру неверного высказывания:

$$[\forall x \in \mathbb{N}\ 2|x \to 4|x] = 0.$$

(здесь | означает «делит»)

Мы знаем, что его отрицание должно быть верным:

$$\neg\forall x \in \mathbb{N}\ 2|x \to 4|x.$$

Но что значит $\neg\forall$: «не для всех верно»?

Но что значит $\neg\forall$: «не для всех верно»? Это все равно, что «для какого-то неверно». Так что можем переписать:

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \neg(2|x \to 4|x).$$

$$\neg\ \forall x \in \mathbb{N}\ (2|x \to 4|x)$$

Но что значит $\neg\forall$: «не для всех верно»? Это все равно, что «для какого-то неверно». Так что можем переписать:

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \neg(2|x \to 4|x).$$

А что значит $\neg\exists$: «не существует такой, что верно»?

Но что значит $\neg\forall$: «не для всех верно»? Это все равно, что «для какого-то неверно». Так что можем переписать:

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \neg(2|x \to 4|x).$$

А что значит $\neg\exists$: «не существует такой, что верно»? Например,

$$\neg\exists x \in \mathbb{N}\ x < 1.$$

Это все равно, что «для всех неверно»! То есть,

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \neg(x < 1).$$

Но что значит $\neg\forall$: «не для всех верно»? Это все равно, что «для какого-то неверно». Так что можем переписать:

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \neg(2|x \to 4|x).$$

А что значит $\neg\exists$: «не существует такой, что верно»? Например,

$$\neg\exists x \in \mathbb{N}\ x < 1.$$

Это все равно, что «для всех неверно»! То есть,

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \neg(x < 1).$$

Приходим к такому любопытному закону:

$$\neg\forall x\ P(x) = \exists x\ \neg P(x); \quad \neg\exists x\ P(x) = \forall x\ \neg P(x).$$

Но что значит $\neg\forall$: «не для всех верно»? Это все равно, что «для какого-то неверно». Так что можем переписать:

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \neg(2|x \to 4|x).$$

А что значит $\neg\exists$: «не существует такой, что верно»? Например,

$$\neg\exists x \in \mathbb{N}\ x < 1.$$

Это все равно, что «для всех неверно»! То есть,

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \neg(x < 1).$$

Приходим к такому любопытному закону:

$$\neg\forall x\ P(x) = \exists x\ \neg P(x); \quad \neg\exists x\ P(x) = \forall x\ \neg P(x).$$

То есть, отрицание проносится за квантор, при этом сам квантор меняется. Это важное свойство, будем использовать очень часто.